XIX JUNIOR BALKAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
Belgrade, Serbia

19th Junior Balkan Mathematical Olympiad
June 24-29, 2015, Belgrade, Serbia

Language: *Bulgarian*
Friday, June 26, 2015.

1. Намерете всички прости числа *a*, *b*, *c* и цели положителни числа *k*, които удовлетворяват равенството

$$a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1.$$

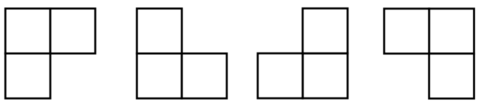
2. Нека *a*, *b*, *c* са положителни реални числа, за които $a + b + c = 3$. Намерете най-малката стойност на

$$A = \frac{2-a^3}{a} + \frac{2-b^3}{b} + \frac{2-c^3}{c}.$$

3. Нека *ABC* е остроъгълен триъгълник, а правите l_1 и l_2 са перпендикулярни на *AB* съответно през точките *A* и *B*. Нека *M* е средата на страната *AB*, а перпендикулярите от *M* към правите *AC* и *BC* пресичат l_1 и l_2 съответно в точките *E* и *F*. Ако *D* е пресечната точка на правите *EF* и *MC*, докажете, че

$$\angle ADB = \angle EMF.$$

4. *L*-форма е една от следните четири фигури, всяка от които е съставена от три единични квадратчета:



Дадени са неограничен брой *L*-форми и дъска 5×5, съставена от 25 единични квадратчета. Нека $k \leq 25$ е цяло положително число. Двама играчи *A* и *B* играят на следната игра: започвайки с *A* и редувайки се, те отбелязват по едно неотбелязано преди това единично квадратче. Играта завършва, когато двамата играчи отбележат общо *k* единични квадратчета.

Едно разполагане на *L*-форми върху неотбелязани единични квадратчета се нарича *добро*, ако *L*-формите не се застъпват и всяка от тях покрива точно три неотбелязани единични квадратчета от дъската.

B печели, ако при всяко *добро* разполагане на *L*-форми поне три неотбелязани единични квадратчета остават непокрити. Намерете най-малката стойност на *k*, за която *B* има печеливша стратегия.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява с 10 точки