XIX JUNIOR BALKAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
Belgrade, Serbia

19th Junior Balkan Mathematical Olympiad
June 24-29, 2015, Belgrade, Serbia

Langue: *Français*
Vendredi 26 juin 2015.

1. Trouver tous les nombres premiers *a*, *b*, *c* et tous les entiers *k* naturels non nuls satisfaisant l'équation

$$a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1.$$

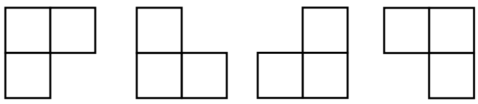
2. Soit *a, b, c* des réels strictement positifs tels que $a + b + c = 3$. Trouver la plus petite valeur que peut prendre l'expression

$$A = \frac{2-a^3}{a} + \frac{2-b^3}{b} + \frac{2-c^3}{c}.$$

3. Soit *ABC* un triangle acutangle. Les droites l_1 et l_2 sont perpendiculaires à (*AB*), respectivement en *A* et en *B*. Les droites issues du milieu *M* de [*AB*] et perpendiculaires à (*AC*) et (*BC*) coupent respectivement l_1 et l_2 en *E* et *F*. Si *D* est le point d'intersection de (*EF*) et (*MC*), montrer que

$$\widehat{ADB} = \widehat{EMF}.$$

4. Une L-forme est une des quatre pièces suivantes, chacune comprenant trois carrés unités :



On considère une grille 5×5, qui comprend 25 carrés unités, un entier naturel non nul $k \leq 25$, et un tas illimité de L-formes. Deux joueurs, A et B, jouent au jeu suivant : chacun son tour, en commençant par A, ils colorient un carré unité non encore colorié, et ce jusqu'à ce que *k* carrés unités aient été coloriés au total. Un pavage des carrés unités non coloriés par des L-formes est dit *bon* si les L-formes ne se chevauchent pas et si chaque L-forme recouvre exactement trois carrés unités non coloriés de notre grille.
B gagne si, pour chaque *bon* pavage par des L-formes, il reste au moins trois carrés unités non coloriés et non recouverts par le pavage. Déterminer la plus petite valeur de *k* pour laquelle B dispose d'une stratégie gagnante.

Durée : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème est noté sur 10 points