



19^η ΒΑΛΚΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΝΕΩΝ
24-29 Ιουνίου, 2015, Βελιγράδι, Σερβία

Language: Ελληνικά
 Παρασκευή, 26 Ιουνίου 2015

Πρόβλημα 1. Βρείτε όλους τους πρώτους αριθμούς a, b, c και όλους τους θετικούς ακεραίους k που ικανοποιούν την εξίσωση

$$a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1$$

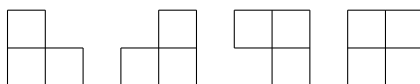
Πρόβλημα 2. Θεωρούμε τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς a, b, c , που είναι τέτοιοι ώστε $a + b + c = 3$. Βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A = \frac{2 - a^3}{a} + \frac{2 - b^3}{b} + \frac{2 - c^3}{c}$$

Πρόβλημα 3. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC . Οι ευθείες l_1 και l_2 είναι κάθετες στην AB στα σημεία A και B , αντίστοιχα. Οι κάθετες ευθείες από το μέσον M του AB προς τις πλευρές AC και BC του τριγώνου τέμνουν τις ευθείες l_1 και l_2 στα σημεία E και F , αντίστοιχα. Αν D είναι το σημείο τομής των ευθειών EF και MC , να αποδείξετε ότι

$$\angle ADB = \angle EMF$$

Πρόβλημα 4. Καθένα από τα ακόλουθα τέσσερα σχήματα αποτελείται από τρία μοναδιαία τετράγωνα και καλείται L-σχήμα.



Δίνονται ένας 5×5 πίνακας, αποτελούμενος από 25 μοναδιαία τετράγωνα, ένας θετικός ακέραιος $k \leq 25$ και απεριόριστος αριθμός L-σχημάτων οποιουδήποτε τύπου. Δύο παίκτες, ο A και ο B , παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι:

Ξεκινώντας με τον A , σημειώνουν εναλλάξ σε κάθε κίνησή τους ένα τετραγώνο που δεν είναι ήδη σημειωμένο, μέχρι να σημειώσουν συνολικά k μοναδιαία τετράγωνα.

Μία τοποθέτηση L-σχημάτων λέγεται *καλή* αν τα L-σχήματα δεν επικαλύπτονται και καθένα από αυτά καλύπτει ακριβώς τρία μοναδιαία τετράγωνα του πίνακα που δεν είναι σημειωμένα. Ο B κερδίζει αν μετά από οποιαδήποτε *καλή* τοποθέτηση L-σχημάτων μένουν ακάλυπτα τουλάχιστον 3 μοναδιαία τετράγωνα που δεν είναι σημειωμένα. Προσδιορίστε την ελάχιστη τιμή του k για την οποία ο B έχει στρατηγική νίκης.

Διάρκεια: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 10 μονάδες