XIX JUNIOR BALKAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
Belgrade, Serbia

19th Junior Balkan Mathematical Olympiad
June 24-29, 2015, Belgrade, Serbia

Language: *Macedonian*
Петок, 26 јуни 2015 година

1. Најди ги сите прости броеви a, b, c и природни броеви k кои што ја задоволуваат равенката

$$a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1.$$

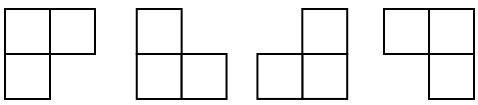
2. Нека a, b, c се позитивни реални броеви, такви што $a + b + c = 3$. Најди ја најмалата (минимална) вредност што може да ја има изразот

$$A = \frac{2 - a^3}{a} + \frac{2 - b^3}{b} + \frac{2 - c^3}{c}.$$

3. Нека ABC е остроаголен триаголник. Правите l_1 и l_2 се нормали на AB во точките A и B, соодветно. Нека точката M е средина на отсечката AB. Нормалите повлечени од точката M на правите AC и BC ги сечат l_1 и l_2 во точките E и F, соодветно. Ако D е пресек на правите EF и MC, докажи дека

$$\measuredangle ADB = \measuredangle EMF.$$

4. L-форма е фигура која може да има еден од четирите облици прикажани на сликата (секоја од нив се состои од 3 единични квадрати):



Дадена е табла 5×5, која се состои од 25 единични квадрати. Нека се дадени и неограничен број на L-форми. Нека k е даден природен број, т.ш. $k \leq 25$.
Два играчи, A и B, ја играат следата игра: играта ја почнува играчот A и наизменично бојат (со иста боја) по еден единичен квадрат, кој претходно не е обоен. Велиме дека играта е завршена, кога на таблата се обоени вкупно k единични квадрати.
Велиме дека L-формите *добро* ги покриваат необоените единични квадрати на таблата ако тие не се преклопуваат и секоја од нив покрива точно три необоени единични квадрати на таблата.
Играчот B победува ако секое *добро* прекривање со L-форми остава непокриени најмалку три необоени единични квадрати. Најди ја најмалата можна вредност за k за која играчот B има победничка стратегија.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.
Секоја задача се бодува са 10 поени.