XIX JUNIOR BALKAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
Belgrade, Serbia

19th Junior Balkan Mathematical Olympiad
June 24-29, 2015, Belgrade, Serbia

Language: *Montenegrian*
Petak, 26.jun 2015. godine

1. Odredi sve proste brojeve a, b, c i prirodne brojeve k koji zadovoljavaju jednačinu

$$a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1.$$

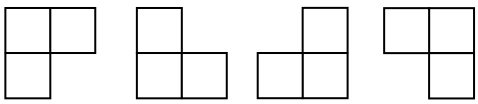
2. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c = 3$. Odrediti najmanju (minimalnu) vrijednost koju može imati izraz

$$A = \frac{2-a^3}{a} + \frac{2-b^3}{b} + \frac{2-c^3}{c}.$$

3.Neka je ABC oštrougli trougao. Prave l_1 и l_2 су normalne na AB u tačkama A и B, redom. Neka je tačka M središte duži AB. Normale povučene iz tačke M na prave AC i BC sijeku l_1 i l_2 u tačkama E i F, redom. Ako je D presjek pravih EF i MC, dokazati da je

$$\measuredangle ADB = \measuredangle EMF.$$

4. L-figura je figura koja može da ima jedan od četiri oblika sa slike (svaka figura se sastoji od 3 jedinična kvadrata):



Data je tabla 5×5, koja se sastoji od 25 jediničnih kvadrata. Neka je k prirodan broj takav da je $k \leq 25$ i neka je dat neograničen broj L-figura.
Dva igrača, A i B, igraju sljedeću igru: Igru počinje igrač A. Igrači naizmjenično boje istom bojom po jedan jedinični kvadrat table, koji prethodno nije obojen. Igra je završena kada se oboji ukupno k jediničnih kvadrata.
Kažemo da L-figure *dobro* prekrivaju neobojene jedinične kvadrate na tabli ako se ne preklapaju i ako svaka od njih pokriva tačno tri neobojena jedinična kvadrata na tabli.
Igrač B pobjeđuje ako svako *dobro* prekrivanje L-figurama ostavlja neprekrivena najmanje tri neobojena jedinična kvadrata. Odrediti najmanju moguću vrijednost za k za koju igrač B ima pobjedničku strategiju.

Vrijeme za izradu: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak se boduje sa 10 poena