

XIX JUNIOR BALKAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
Belgrade, Serbia

19th Junior Balkan Mathematical Olympiad
June 24-29, 2015, Belgrade, Serbia

Language: *Russian*
Пятница, 26 июня 2015 года

1. Найдите все простые числа a, b, c и натуральные k , удовлетворяющие уравнению

$$a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1.$$

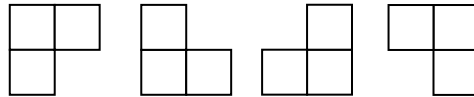
2. Сумма трех положительных вещественных чисел a, b, c равна 3. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$A = \frac{2-a^3}{a} + \frac{2-b^3}{b} + \frac{2-c^3}{c}.$$

3. Пусть ABC – остроугольный треугольник. Прямые l_1 и l_2 перпендикулярны AB и проходят через A и B , соответственно. Перпендикуляры, опущенные из середины M отрезка AB на прямые AC и BC , пересекают l_1 и l_2 в точках E и F , соответственно. Прямые EF и MC пересекаются в точке D . Докажите, что

$$\angle ADB = \angle EMF.$$

4. L -фигурка – это одна из следующих фигурок, состоящих из трех единичных клеток:



Даны клетчатая доска 5×5 , состоящая из 25 единичных клеток, и натуральное число $k \leq 25$. Двое, A и B , играют в следующую игру: они по очереди отмечают ранее не отмеченные клетки доски (на каждом ходу по клетке), пока количество отмеченных клеток не станет равным k . Начинает A .

Хорошим размещением называется такое размещение L -фигурок на части доски, состоящей из неотмеченных клеток, при котором любые две L -фигурки не имеют общих клеток и при котором каждая из них покрывает ровно три неотмеченные клетки доски.

Выигрывает B , если любое *хорошее* размещение L -фигурок оставляет непокрытыми по крайней мере три неотмеченные клетки. Найдите наименьшее k , для которого у B есть выигрышная стратегия.

Время: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 10 баллов