XIX JUNIOR BALKAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
Belgrade, Serbia

19th Junior Balkan Mathematical Olympiad
June 24-29, 2015, Belgrade, Serbia

Language: *Serbian*
Петак, 26. јун 2015. године

1. Одреди све просте бројеве a, b, c и природне бројеве k који задовољавају једначину

$$a^2+b^2+16c^2=9k^2+1.$$

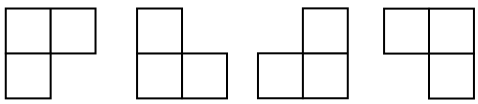
2. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви такви да је $a+b+c=3$. Одреди најмању (минималну) вриједност коју може имати израз

$$A=\frac{2-a^3}{a}+\frac{2-b^3}{b}+\frac{2-c^3}{c}.$$

3. Нека је ABC оштроугли троугао. Праве l_1 и l_2 су нормалне на AB у тачкама A и B, редом. Нека је тачка M средиште дужи AB. Нормале повучене из тачке M на праве AC и BC сијеку l_1 и l_2 у тачкама E и F, редом. Ако је D пресјек правих EF и MC, докажи да је

$$\measuredangle ADB=\measuredangle EMF.$$

4. L-фигура је фигура која може да има један од четири облика са слике (свака фигура се састоји од 3 јединична квадрата):



Дата је табла 5×5, која се састоји од 25 јединичних квадрата. Нека је k природан број такав да је $k\leq 25$ и нека је дат неограничен број L-фигура. Два играча, A и B, играју следећу игру: Игру почиње играч A. Играчи наизмјенично боје истом бојом по један јединични квадрат табле који претходно није обојен. Игра је завршена када се обоји укупно k јединичних квадрата.
Кажемо да L-фигуре *добро* прекривају необојене јединичне квадрате на табли ако се не преклапају и ако свака од њих покрива тачно три необојена јединична квадрата на табли.
Играч B побјеђује ако свако *добро* прекривање L-фигурама оставља непрекривена најмање три необојена јединична квадрата. Одреди најмању могућу вриједност за k за коју играч B има побједничку стратегију.

Вријеме за израду: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак се бодује са 10 поена